

# ARHITEKTURA DIGITALNIH FIR FILTARA ZASNOVANA NA ARITMETICI OSTATAKA DIGITAL FIR FILTER ARCHITECTURE BASED ON THE RESIDUE NUMBER SYSTEM

Negovan Stamenković, Prirodno-matematički fakultet u K. Mitrovici, Siniša Minić, Učiteljski fakultet u Leposaviću i  
Vidosav Stojanović, Elektronski fakultet u Nišu

**Sadržaj** – U radu je prikazana sinteza digitalnih filtara sa konačnim impulsnim odzivom zasnovana na aritmetici ostataka. Digitalna obrada signala, zasnovana na aritmetici ostataka, omogućava brzu obradu signala koja sadrži samo operacije množenja i sabiranja, a to su filtri sa konačnim impulsnim odzivom. Tokom obrade signala treba izbeći operaciju deljenja i pekorachenje rezultata navedenih aritmetičkih operacija. Simulacija obrade signala izvršena je u programskom paketu MATLAB®. Razvijeni su programi za direktnu i inverznu konverziju brojeva u reziduumski brojni sistem, aritmetičke operacije množenja i sabiranja kao i program za detekciju znaka broja. Na primeru filtra 31vog reda detaljno je opisana obrada signala u aritmetici ostataka.

**Abstract** – In this paper, architecture of residue number system used in FIR filters, is presented. For many years residue number coding has been recognized as a system which provides capability for implementation of a high speed addition and multiplication. This advantages of residue number system coding for the design high speed FIR filters results from the fact that an digital FIR filter requires only addition and multiplication. The proposed FIR filter architecture is performed as series of modulo multiple and accumulation across each moduli. A numerical example illustrates the principles of FIR filtering of an 64 order low pass filter. This architecture is compared with direct synthesis of FIR filters.

## 1. UVOD

**I**STRAŽIVANJA koja se odnose na reziduume i reziduumski brojni sistem datira još iz 4. veka nove ere, a prvi autor koji ih je spomenuo je Sun Tzu, u svojoj knjizi Suan-ching. Tehnika koju je Sun Tzu koristio da pronađe rešenje sledeće zagonetke

Imamo stvari čiji broj ne znamo,  
ako ih grupišemo u trojke, ostatak je 2,  
ako ih grupišemo u petorke, ostatak je 3,  
ako ih grupišemo u sedmorke, ostatak je 2.  
Koliko stvari imamo?

poznata je kao kineska teorema ostataka, danas ima veliki značaj u računarstvu. Povećavanjem dužine digitalne reči u memoriji računara, povećavaju se i brojevi koje možemo zapisati u računaru. Rad sa velikim brojevima povećava i samo vreme potrebno za izvršenje operacija nad tim brojevima. Kineska teorema ostataka omogućava da velike brojeve predstavimo manjim brojevima, a samim tim i ubrzamo aritmetičke operacije. Takođe, na ovaj način možemo predstaviti neke velike brojeve koje inače ne bi mogli da predstavimo u računaru.

Aritmetiku ostataka u računarima opšte namene prvi su uveli Szabo i Tanaka još davne 1976 godine [1]. U toj knjizi su detaljno opisali prednosti brzog množenja i sabiranja u odnosu na klasične postupke, kao i teškoće koje se odnose na deljenje, detekciju znaka i poređenja vrednosti brojeva.

Radovi iz digitalne obrade signala odnose se pre svega na izbor modula [2], [3], [4], [5] i detekciju znaka [6], [7], [8]. Relativno mali broj radova odnosi se na obradu signala koja se zasniva na aritmetici ostataka [9], [10], [11], [12], kako na realizaciji filtara sa konačnim impulsnim odzivom tako i

na realizaciju filtara sa beskonačnim impulsnim odzivom.

Programski paket MATLAB® ne sadrži softver za obradu signala u aritmetici ostataka. Cilj rada je da se u programskom paketu MATLAB® razvije softver za simulaciju obrade signala, filtrom sa konačnim impulsnim odzivom, zasnovan na aritmetici ostataka. Softver treba da sadrži MATLAB® funkcije za osnovne operacije u aritmetici ostataka, kao i funkcije za transformaciju brojeva iz formata nepokretne tačke u celobrojne vrednosti i obrnuto. Razmatra se digitalni filter sa konačnim impulsnim odzivom 31vog reda. Prikazuju se rezultati simulacije odziva filtra na jedinični niz i prostoperiodičnu diskretnu funkciju.

## 2. ARITMETIKA OSTATAKA

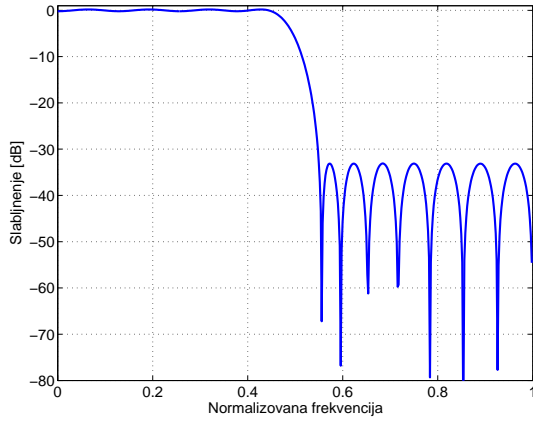
Reziduumski brojni sistem (eng. residue number system RNS) je decimalni broj predstavljen  $n$ -torkom ostataka respektivno poređanih u odnosu na module iz skupa modula. Kako bi definisali jedan RNS broj, uzmimo decimalni broj  $X$  i jedan broj iz skupa modula koji formiraju vektor  $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ . Decimalni broj  $X$  predstavljen u ovom sistemu bi izgledao kao skup brojeva  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  čiji se članovi dobijaju sledećom formulom

$$x_i = X \pmod{m_i}, \quad 1 \leq i \leq n$$

Na ovaj način moguće je predstaviti bilo koji interval brojeva. Dužinu tog intervala  $I$  određujemo sledećom formulom

$$I = m_1 m_2 \cdots m_n - 1 \quad (1)$$

Pri ovome treba obratiti pažnju na jedan veoma važan uslov. Taj uslov je da svi moduli iz skupa modula moraju biti



Sl. 1. Karakteristika slabljenja filtra sa konačnim impulsnim odzivom propusnika niskih frekvencija 31tog reda.

uzajamno prosti brojevi, odnosno ne sme se javiti ni jedan par modula čiji će najveći zajednički delilac biti različit od jedinice. Dakle, moduli su dobro izabrani ako važi: najveći zajednički delilac  $(m_i, m_j)=1$ , za svako  $i, j$  takvo da važi  $1 \leq i, j \leq n$ .

Interval brojeva (1) se najčešće deli na dva jednaka dela  $[-w, w]$  od kojih je jedan rezervisan za negativne brojeve a drugi za pozitivne brojeve. Opseg brojeva se računa prema formuli

$$-\frac{I}{2} \leq X \leq \frac{I}{2} \quad \text{za } I \text{ parno,}$$

ili

$$-\frac{I+1}{2} \leq X \leq \frac{I+1}{2} - 1 \quad \text{za } I \text{ neparno.}$$

Kada broj  $X$  iz intervala  $[-w, w]$  želimo da zapišemo u reziduumskom brojnem sistemu kao negativan, dakle  $-X$ , primenjuje se sledeće pravilo. Svaki reziduom u zapisu broja se komplementira sa svojim odgovarajućim modulom iz skupa modula kao što pokazuje jednačina (2)

$$X = \{x_1, \dots, x_n\}, \quad x_i = \begin{cases} \langle X \rangle_{m_i}, & X \in [0, w] \\ m_i - \langle X \rangle_{m_i}, & X \in [-w, 0) \end{cases} \quad (2)$$

U slučaju da je reziduom jednak nuli, komplementiranje se ne vrši.

Operacije sabiranja i množenja su definisani u skupu celih brojeva na sledeći način

$$\begin{aligned} A \pm B &= \{ \langle a_1 + b_1 \rangle_{m_1}, \dots, \langle a_k + b_k \rangle_{m_k} \}, \\ A \times B &= \{ \langle a_1 \times b_1 \rangle_{m_1}, \dots, \langle a_k \times b_k \rangle_{m_k} \}. \end{aligned} \quad (3)$$

Ove jednačine ukazuju na paralelnu prirodu obrade signala a da pri tome nije potrebno voditi računa o prenosu.

Inverzna konverzija broja  $X$  koga karakterišu reziduomi  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  zasniva se na dokazu kineske teoreme ostataka

$$X = \left\langle \sum_{i=1}^k \langle \gamma_i x_i \rangle_{m_i} M_i \right\rangle_M \quad (4)$$

gde su  $M = \prod_{i=1}^k m_i$ ,  $M_i = M/m_i$ ,  $\gamma_i = \langle M^{-1} \rangle_{m_i}$  je težina pozicije, dok je  $M_i^{-1}$  inverzni element broja  $M_i$  u odnosu na operaciju množenja u reziduumskom brojnem sistemu

$$\left\langle \langle M_i^{-1} \rangle_{m_i} M_i \right\rangle_{m_i} = 1, \quad 0 \leq M_i, \quad M_i^{-1} < m_i. \quad (5)$$

Inverzni element u odnosu na množenje uvek postoji kada su moduli međusobno relativno prosti brojevi.

### 3. RNS APROKSIMACIJA

Na Slici 1 prikazana je karakteristika slabljenja nerekurzivnog digitalnog filtra propusnika niskih frekvencija sa linearnom faznom karakteristikom 31-vog reda koji je dobijen Parks-McClellanovim aproksimacionim postupkom. Ulazni podaci su red i gabarit filtra. Za veće slabljenje u nepropusnom opsegu treba usvojiti viši red filtra.

U Tabeli 1 su dati koeficijenti filtra i to: dvostruka tačnost u formatu pokretne tačke prema standardu IEEE754-85, celobrojne vrednosti i RNS prezentacija. Iz tabele se može zaključiti da je impulsni odziv je simetričan, što znači da je fazna karakteristika linearna. Lako se može uočiti da su koeficijenti filtra simetrični, što je karakteristika filtera sa linearnom faznom karakteristikom.

TABELA 1. KOEFICIJENTI FILTRA PROPUSNIKA NISKIH FREKVENCIJA 31-VOG REDA.

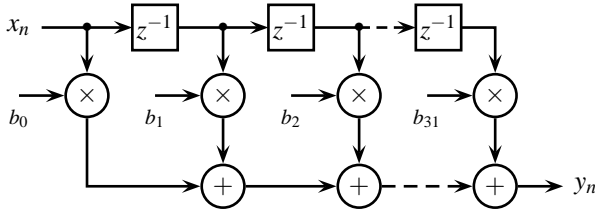
|                   | Dvostruka tačnost | Int. | RNS broj      |
|-------------------|-------------------|------|---------------|
| $b_0 = b_{31}$    | -0.00686681410661 | -4   | {15 19 25 27} |
| $b_1 = b_{30}$    | -0.01369823202037 | -7   | {12 16 22 24} |
| $b_2 = b_{19}$    | 0.01125107930570  | 6    | {6 6 6 6}     |
| $b_3 = b_{28}$    | 0.00880422294517  | 5    | {5 5 5 5}     |
| $b_4 = b_{27}$    | -0.01160511913915 | -6   | {13 17 23 25} |
| $b_5 = b_{26}$    | -0.01450301466649 | -7   | {12 16 22 24} |
| $b_6 = b_{25}$    | 0.01729041606547  | 9    | {9 9 9 9}     |
| $b_7 = b_{24}$    | 0.02038226289557  | 10   | {10 10 10 10} |
| $b_8 = b_{23}$    | -0.02467371536397 | -13  | {6 10 16 18}  |
| $b_9 = b_{22}$    | -0.02981955010187 | -15  | {4 8 14 16}   |
| $b_{10} = b_{21}$ | 0.02981955010187  | 19   | {0 19 19 19}  |
| $b_{11} = b_{20}$ | 0.04657462794894  | 24   | {5 1 24 24}   |
| $b_{12} = b_{19}$ | -0.06172926692414 | -32  | {6 14 26 30}  |
| $b_{13} = b_{18}$ | -0.08805312675403 | -45  | {12 1 13 17}  |
| $b_{14} = b_{17}$ | 0.14898863628661  | 76   | {0 7 18 14}   |
| $b_{15} = b_{16}$ | 0.44971063397491  | 230  | {2 0 27 13}   |

Celobrojne vrednosti u trećoj koloni tabele su dobijene tako što su vrednosti koeficijenata iz formata pokretne tačke (B), koje se nalaze u drugoj koloni, transformisane u binarne brojeve (B\_int) sa nepokretnom tačkom dužine 10 bita, sa razlomljenim delom koji iznosi 9 bita, korišćenjem sledećeg para MATLAB<sup>®</sup> funkcija `q1=quantizer('round',[10 9])` i `B_bin=num2bin(q1,B)`. Od ovako generisanog binarnog broja B\_bin dobijena je celobrojna prezentacija koeficijenata filtra (B\_int) primenom novog para MATLAB<sup>®</sup> funkcija `q2=quantizer('round',[10 0])` i `B_int=bin2num(q2,B_bin)`. Konačno, celobrojne vrednosti koeficijenata filtra su transformisane u RNS brojeve. MATLAB<sup>®</sup> funkcija za ovu operaciju je `B_RNS(i)=mod(B_int,RNS(i))` za  $i=1,2,3,4$ , za skup modula koji u našem primeru iznosi {19, 23, 29, 31} i one se nalaze u trećoj koloni.

Na Slici 2 prikazana je direktna struktura filtra sa konačnim impulsnim odzivom 31-vog reda kojim se realizuje prenosna funkcija filtra

$$y_n = b_0 x_n + b_1 x_{n-1} + \dots + b_{31} x_{n-31} \quad (6)$$

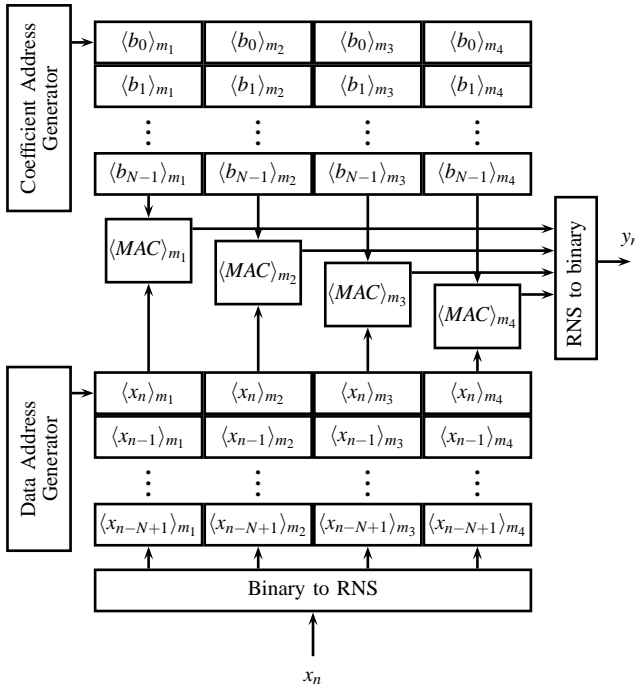
Ova struktura je u literaturi poznata kao direktna realizacija [13].



Sl. 2. Direktna struktura filtra sa konačnim impulsnim odzivom trideset-prvog reda.

#### 4. ARHITEKTURA

Na Slici 3 prikazana je arhitektura nerekurzivnog digitalnog filtra zasnovana na aritmetici ostataka, kojom se simulira filter sa konačnim impulsnim odzivom prikazan na Slici 2, u aritmetici ostataka sa četiri modula. Množenje i sabiranje brijeva izvršava se u bloku MAC (engl. Multiple And Accumulate). U konkretnom slučaju digitalne obrade signala filtrom sa konačnim impulsnim odzivom prema jednačini (6), prvi operand čine koeficijenti filtra, dok drugi operand je ulazni niz.



Sl. 3. Arhitektura rekurzivnog digitalnog filtra zasnovana na aritmetici ostataka.

Transformacija binarnog broja u RNS broj je prvi korak kod obrade signala u aritmetici ostataka. Uočimo binarni broj  $X$  koji je zapisan u  $t+1$  binarnom brojnem sistemu u kome se negativni brojevi prikazuju u potpunom komplementu

$$x = \sum_{j=0}^t B_j 2^j$$

gde je  $B_t$  bit znaka. Ako broj  $X$  želimo da zapišemo u RNS brojnem sistemu, ostatak za određeni moduo iz skupa

modula dobićemo preko sledeće formule

$$X = \left\langle B_t(m_i - \langle 2^t \rangle_{m_i}) + \sum_{j=0}^{t-1} B_j \langle 2^j \rangle_{m_i} \right\rangle_{m_i}$$

Konverzija RNS broja u binarni zasniva se na kineskoj teoriji ostataka [4].

#### 5. SIMULACIJA OBRADE SIGNALA U ARITMETICI OSTATAKA

Usvojena je osmobitna konverzija ulaznog signala, što opseg brojeva u celobrojnoj notaciji iznosi  $-127 \leq x(i) \leq 128$ . Za ovako definisani ulazni niz, najveća apsolutna vrednost izlaznog niza iznosi

$$\begin{aligned} |y(n)| &\leq \max\{|u(n)| \sum_{k=0}^{N-1} |b_k|\} \\ &= 128 \times 1016 \\ &= 130048 \end{aligned}$$

što daje dinamički opseg od

$$\log_2(130048) = 16.9887 \text{ bita.}$$

Skup modula  $m = \{19, 23, 29, 31\}$  daje sledeći opseg brojeva koji se može predstaviti u ovom brojnem sistemu je

$$M = \prod_{i=1}^4 m_i = 392863$$

ili  $\pm 196231$ , što daje dinamički opseg od

$$\log_2(196431) = 17.5837 \text{ bita.}$$

Prema tome, za svaki modul iz usvojenog skupa modula potrebno je pet bit, i oni u potpunosti zadovoljavaju dinamički opseg projektovanog filtra.

Odziv filtra  $y_n$  na ulazni niz  $x_n$  računa se prema formuli (7)

$$\begin{aligned} \langle y_n \rangle_{m_1} &= \langle b_0 \rangle_{m_1} \langle x_n \rangle_{m_1} + \langle b_1 \rangle_{m_1} \langle x_{n-1} \rangle_{m_1} + \dots \\ &\quad + \langle b_{31} \rangle_{m_1} \langle x_{n-31} \rangle_{m_1} \\ \langle y_n \rangle_{m_2} &= \langle b_0 \rangle_{m_2} \langle x_n \rangle_{m_2} + \langle b_2 \rangle_{m_2} \langle x_{n-1} \rangle_{m_2} + \dots \\ &\quad + \langle b_{31} \rangle_{m_2} \langle x_{n-31} \rangle_{m_2} \\ &\vdots \\ \langle y_n \rangle_{m_4} &= \langle b_0 \rangle_{m_4} \langle x_n \rangle_{m_4} + \langle b_2 \rangle_{m_4} \langle x_{n-1} \rangle_{m_4} + \dots \\ &\quad + \langle b_{31} \rangle_{m_4} \langle x_{n-31} \rangle_{m_4} \end{aligned} \quad (7)$$

gde su  $\langle b_i \rangle_{m_k}$  koeficijenti filtra,  $\langle x_i \rangle_{m_k}$  su ulazni signali za  $i = 0, 1, \dots, 31$  i  $k = 1, 2, 3$  i  $4$ , za svaki od četiri modula. Izlazni signal je

$$y_n = \{\langle y_n \rangle_{m_1}, \langle y_n \rangle_{m_2}, \langle y_n \rangle_{m_3}, \langle y_n \rangle_{m_4}\} \quad (8)$$

Konverzijom signal  $y_n$  iz reziduumskog brojnog sistema u binarni završava se digitalna ovrada signala  $x_n$ .

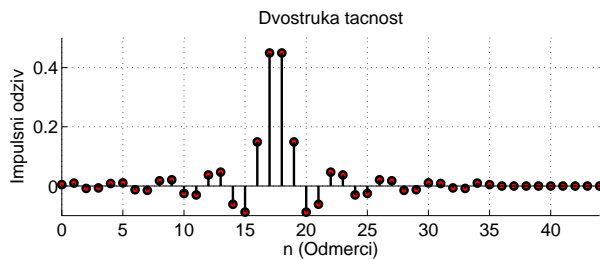
##### 5.1. Odziv filtra na jedinični impuls

Za simulaciju obrade signala filtrom sa konačnim impulsnim odzivom za ulazni signal usvojen je jedinični niz, koji je u celobrojnoj notaciji, dat sledećim izrazom

$$u(n) = \begin{cases} 64, & \text{za } n = 0 \\ 0, & \text{za } n \neq 0. \end{cases} \quad (9)$$

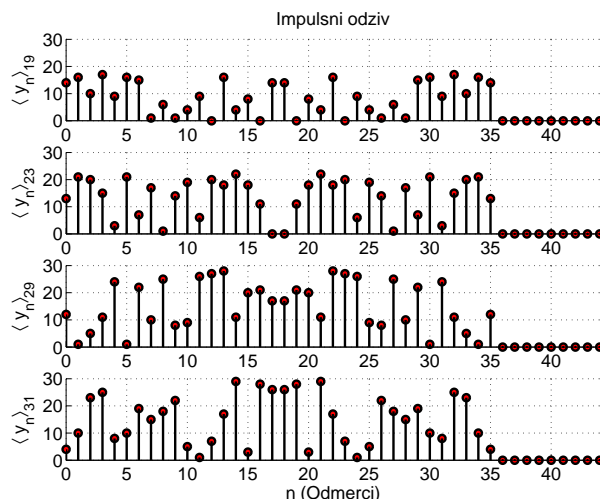
Kao rezultat paralelne obrade signala u RNS aritmetici prema formuli (7) dobija se odziv filtra u obliku RNS brojeva. U prvom koraku treba izvršiti njihovu konverziju u celobrojne dekadne brojeve  $Y_{int}$ , koje zatim treba transformisati u binarne brojeve. Pri ovoj transformaciji treba imati u vidu da su koeficijenti kodirani sa deset bita i da broj bitova kojim je kodiran ulazni signal, prema jednačini (9), iznosi šest bita. Nakon množenja ulaznog niza sa koeficijentima filtra dobija se proizvod dužine šesnaest bita. Dakle, za konverziju celobrojnih dekadnih brojeva treba koristiti format  $q1o=quantizer('round',[16\ 0])$  i  $Y_{bin}=num2bin(q1o, B_{int})$ . Konačno, u drugom koraku se dobija konačan rezultat obrade signala u formatu nepokretne tačke zasnovan na MATLAB<sup>®</sup> funkcijama  $q2o=quantizer('round',[16\ 15])$  i  $Y=bin2num(q2o, Y_{bin})$ . Dalje, ovaj rezultat se može zaokružiti na željeni broj decimalnih mesta.

Na Slici 5 prikazan je odziv filtra na jedinični impuls kada je za izračunavanje usvojena dvostruka tačnost prema standardu IEEE754-85.



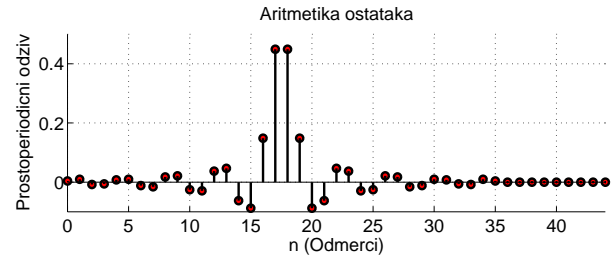
Sl. 4. Odziv filtra na jedinični impuls.

Na Slici 5 su prikazani odzivi svakog kanala filtra na jedinični impuls. Brojevi u prvom kanalu su manji od 19, u drugom kanalu su manji od 23, u trećem kanalu su manji od 29, a u četvrtom kanalu su manji od 31.



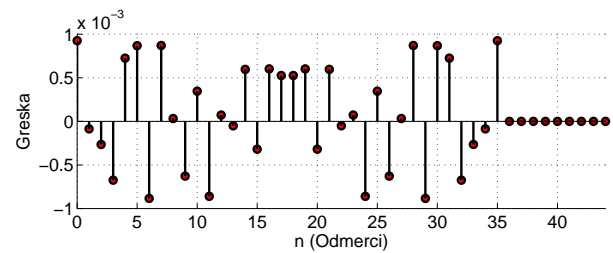
Sl. 5. Odziv RNS kanala na jedinični impuls.

Konverzijom RNS odziva sa Slike 5 dobija se odziv filtra na jedinični impuls koji je prikazan na Slici 6. Odziv filtra na jedinični niz prikazan na Slici 6 je identičan sa odzivom filtra koji se dobija standardnim postupkom kada se za predstavljanje koeficijenata i podataka usvoji deset bita a sabiranje obavi nad dvadesetobitnim brojevima koji nastaju kao rezultat množenja desetobitnog koeficijenta sa desetobitnim podatkom.



Sl. 6. Odziv filtra na jedinični impuls dobijen primenom aritmetike ostataka.

Konačno, na Slici 7 prikazana greška koju unosi RNS obrada signala, a dobijena je kao razlika odziva sa Slike 4 i Slike 6.



Sl. 7. Greška izračunata kao razlika između impulsnog odziva dobijenog u aritmetici ostataka (Slika 6) i u aritmetici dvostruke tačnosti (Slika 4).

Napomenimo da je za kodiranje koeficijenata filtra u formatu nepokretne tačke usvojeno 10 bita, a da je za kodiranje koeficijenata filtra u RNS aritmetici potrebno po pet bita za svaki ostatak što u krajnjem iznosu iznosi 20 bita. Paralelno procesiranje digitalnih reči dužine pet bita je znatno brže od procesiranja digitalne reči dužine deset bita. Konačno, procesiranjem u RNS aritmetici filter ne generiše šumove koji nastaju usled zaokruživanja aritmetičkih operacija.

## 5.2. Odziv filtra na prostoperiodičnu funkciju

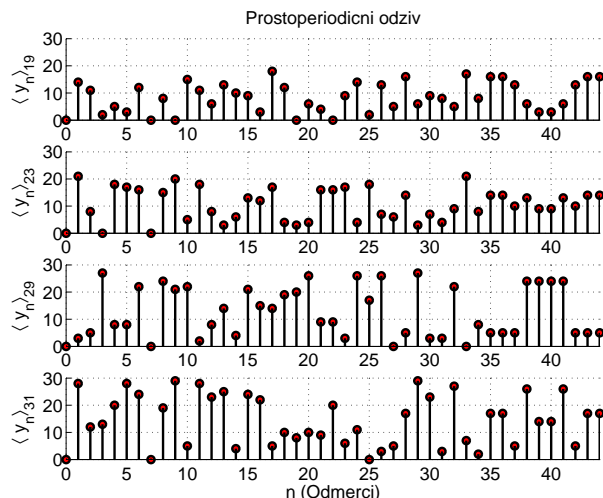
Kao drugi primer izračunat je odziv filtra na prostoperiodičnu funkciju  $x = \sin(2\pi t/8)$ . Normalizovana frekvencija iznosi  $f = 1/8$  Hz i nalazi se u propusnom opsegu filtra. Kao što je prikazano na Slici 4, normalizovana vrednost frekvencije odmeravanja iznosi  $F_s = 2$  Hz.

U celobrojnoj notaciji diskretni prostoperiodični ulazni niz je

$$x(n) = \begin{cases} [62 \sin(2\pi n/8)], & \text{za } n \geq 0 \\ 0, & \text{za } n < 0 \end{cases} \quad (10)$$

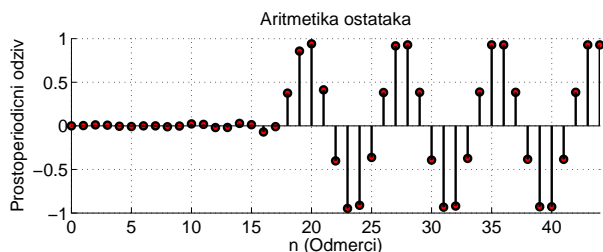
gde  $[\cdot]$  označava da je za vrednost funkcije usvojen najbliži ceo broj.

Na Slici 8 prikazan je odziv svakog kanala filtra na diskretnu prostoperiodičnu funkciju (10).



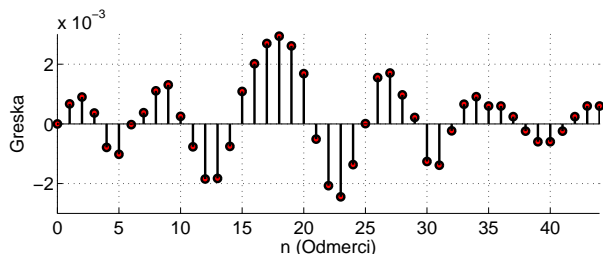
Sl. 8. Odziv RNS kanala na prostoperiodičnu funkciju.

Na Slici 9 prikazan je odziv filtra dobijen konverzijom RNS brojeva sa Slike 8 u binarne brojeve. Na Slici se može uočiti prelazni režim koji predhodi ustaljenom stanju odziva.



Sl. 9. Odziv filtra na prostoperiodičnu funkciju; idealni odziv, gore; odziv dobijen primenom aritmetike ostataka, dole.

Kao u slučaju odziva na jedinični impuls, izračunata je greška kao razlika prostoperiodičnih odziva FIR filtra dobijenih obradom signala aritmetikom ostataka i obradom signala standardnom aritmetikom kod koje su koeficijenti i podaci predstavljeni u dvostrukoj tačnosti. Greška je prikazana na Slici 10.



Sl. 10. Greška izračunata kao razlika između prostoperiodičnog odziva dobijenog u aritmetici ostataka i u aritmetici dvostruke tačnosti.

Greška najveća za tokom prelaznog procesa a zatim, kao i sam signal, dobija prostoperiodični karakter. Trajanje

prelaznog procesa jednako trajanju impulsnog odziva FIR filtra.

Slični rezultati se dobijaju ukoliko se posmatra odziv filtra na prostoperiodični signal čija se frekvencija nalazi u nepropusnom opsegu filtra.

## 6. ZAKLJUČAK

U radu je prikazan pristup realizaciji digitalnog filtra sa konačnim impulsnim odzivom koji se zasniva na aritmetici ostataka. Na primeru digitalnog filtra sa konačnim impulsnim odzivom 31-vog reda prikazana je arhitektura i opisana je simulacija digitalne obrade signala u aritmetici ostataka. Razvijeni su MATLAB<sup>®</sup> programi za konverziju koeficijenata filtra u RNS brojeve, množenje, sabiranje, kao i za konverziju rezultata obrade signala u format nepokretne tačke. Izračunati su odzivi ovako projektovanog filtra na jedinični impuls i prostoperiodičnu funkciju na kojima su analizirane karakteristike projektovanog sistema.

Softverska implementacija paralelne obrade signala i eliminisanje šumova usled zaokruživanja rezultata aritmetičkih operacija, je relativno jednostavna. Međutim, kod hardverske realizacije javljaju se dve značajne teškoće, a to su poređenje brojeva, na kome se zasniva određivanje znaka broja, i prekoračenje opsega brojeva.

## LITERATURA

- [1] N. Szabo and R. I. Tanaka, *Residue Arithmetic and its Application to Computer Technology*. New York: McGraw-Hill, 1967.
- [2] A. Hiasat and A. Zohdy, "Residue-to-binary arithmetic converter for the moduly set  $(2^k, 2^k - 1, 2^{k-1} - 1)$ ," *IEEE Trans. on Circuits and Systems-II: Analog and Digital Signal Processing*, vol. 45, no. 2, pp. 204–209, Feb. 1998.
- [3] G. C. Cardarilli, M. Re, and R. Lojacono, "Efficient modulo extraction for CRT based residue to binary converters," in *1997 IEEE Int. Symposium on Circuits and System*, Hong Kong, June 9–12 1997, pp. 2036–2039.
- [4] A. Omodi and B. Prekumar, *Residue number system, Theory and implementation*. London: Imperial College Press, 2007.
- [5] Y. Wang, X. Song, M. Abdoulhamid, and H. Shen, "Adder base residue to binary number converters for  $(2^n - 1, 2^n, 2^n + 1)$ ," *IEEE Trans. on Signal Processing*, vol. 5, no. 7, pp. 1772–1779, July 2002.
- [6] Z. D. Ulman, "Sign detection and implicit-explicit conversion of numbers in residue arithmetic," *IEEE Trans. on Computers*, vol. C-32, no. 6, pp. 590–594, June 1983.
- [7] T. Tomczak, "Fast sign detection for rns  $(2^n - 1, 2^n, 2^n + 1)$ ," *IEEE Trans. on Circuits and Systems-I: Regular papers*, vol. 55, no. 6, pp. 1502–1511, July 2008.
- [8] Y. Wang, G. A. Jullien, and W. C. Miller, "An improved residue-to-binary number converter," *IEEE Trans. on Circuits System-I: Fundamental Theory Application*, vol. 47, no. 9, pp. 1437–1440, Sept. 2000.
- [9] W. K. Jenkins and B. Leon, "The use of residue number systems in the design of finite impulse response digital filters," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, vol. CAS-24, no. 4, pp. 191–201, Apr. 1997.
- [10] P. Burrascano, G. C. Cardarilli, R. Lojacono, G. Martinelly, and M. Salerno, "Properties and synthesis of RNS digital circuits," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, vol. 37, no. 7, pp. 903–911, July 1990.
- [11] M. A. Soderstrand and B. Sinha, "A pipelined recursive residue number system digital filter," *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, vol. CAS-31, no. 4, pp. 415–417, Apr. 1984.
- [12] G. C. Cardarilli, N. Nannarelli, and M. Re, "Reducing power dissipation in FIR filter using the residue number system," in *proc. 43rd IEEE Midwest Symposium on Circuits and Systems*, 2000.
- [13] J. G. Proakis and D. G. Manolakis, *Introduction to Digital Signal Processing*. New York: Macmillan Publishing Company, 1988.